

## ÁLGEBRA LINEAR UMA EXPERIÊNCIA NO CURSO NOTURNO

**Eloiza Gomes Boscaino** – eloiza@maua.br  
EEM – Escola de Engenharia Mauá

**Renata de Oliveira Martins** – renata@maua.br  
EEM – Escola de Engenharia Mauá

**Roberto Scalco** – roberto.scalco@maua.br  
EEM – Escola de Engenharia Mauá

***Resumo:** Quando a Álgebra Linear passou a integrar o currículo da Escola de Engenharia Mauá, em 1996, no período noturno como uma disciplina isolada e ministrada na segunda série, observaram-se várias dificuldades na aprendizagem dos alunos, fato confirmado em pesquisa realizada com os estudantes. Um olhar crítico dos professores gerou um projeto que culminou com criação de uma nova abordagem não tradicional da Álgebra Linear. Essa, que privilegia a construção de significados e gera a aprendizagem significativa, é fundamental no ensino da disciplina devido às ferramentas que são construídas e possibilita a resolução de diversos problemas para o estudante de Engenharia. Neste trabalho, apresentam-se as ações realizadas durante os anos em que o projeto foi aplicado e aprimorado até o seu final, em 2003, quando a disciplina deixa de ser oferecida na segunda série e passa a fazer parte do curso de Geometria Analítica ministrado na primeira.*

***Palavras-chave:** Álgebra Linear, Ensino, Aprendizagem.*

## INTRODUÇÃO

Desde que a disciplina Álgebra Linear passou a integrar o currículo da Escola de Engenharia Mauá, em 1996, observaram-se várias dificuldades na aprendizagem dos alunos do período noturno, quando o curso era ministrado na segunda série. Esse fato motivou a realização, em 1998, de uma pesquisa com os estudantes que já haviam cursado essa disciplina em algum dos dois anos anteriores. Nesta pesquisa, constatou-se que a Álgebra Linear, considerada um curso básico, estava isolada, com os alunos apresentando grande resistência aos assuntos tidos como extremamente teóricos, presos a rigor matemático e às generalizações. Entre os comentários dos estudantes pesquisados, encontram-se afirmações como estas:

“O curso foi tão teórico, que até hoje não consegui assimilar nada.”

“Quando fiz Álgebra Linear decorei a matéria somente para passar, pois não consegui enxergar a importância da matéria.”

“Como não imagino uma aplicação prática para a disciplina não consigo imaginar a finalidade da mesma, ou seja, para que ela serviu ou para que ela irá servir para o curso e também na vida prática.”

A análise dos resultados da pesquisa confirmou que o desenvolvimento do curso estava longe de realizar seus objetivos e era desprovido de significado para os alunos. Entretanto, a insatisfação demonstrada pelos alunos veio ao encontro da frustração dos professores, que percebiam a ineficácia de seu trabalho em ministrar a disciplina. Acrescente-se a isso o fato de que outros professores, de disciplinas seqüentes, queixavam-se de que os alunos não demonstravam possuir as habilidades e o domínio dos conceitos necessários para o enfrentamento de problemas que utilizavam as ferramentas da Álgebra Linear.

Dessa forma, tendo compreendido com razoável clareza o problema a ser enfrentado, elaborou-se um projeto de reestruturação da Álgebra Linear, cuja implementação foi iniciada em 1999 e aprimorado até o seu final, em 2003, quando a disciplina deixou de ser oferecida na segunda série e passou a fazer parte do curso de Geometria Analítica ministrado na primeira série.

### 1. O PROBLEMA

A Álgebra Linear, no curso de Engenharia, precisa ser uma disciplina fundamental devido ao tipo de ferramentas que são construídas por meio da linguagem e dos conceitos nela trabalhados, que possibilitam a resolução de problemas concretos importantes para o estudante de Engenharia.

### 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O referencial teórico está fundamentado na concepção de que para se conhecer algo é necessário conhece-se o seu significado, como afirma BARUFI (1999, p.12):

“Inicialmente para falarmos a respeito do conhecimento, precisamos esclarecer que nossa concepção é a de que conhecer algo é conhecer o seu significado, e, segundo essa visão, a compreensão não pode ser simplesmente fruto de transmissão. Ela decorre da apreensão do significado do objeto do conhecimento. Quando falamos de significado de um dado conhecimento, estamos nos referindo a todas as relações que dizem respeito a esse conhecimento. Assim sendo, o significado não é algo material que se transfere de um indivíduo para outro. Constitui-se num feixe de relações, analógicas, metafóricas, que podem ser estabelecidas, envolvendo aquilo que se pretende conhecer, enredando-o ao que já é conhecido. Os significados podem emergir das experiências individual ou coletivamente

vivenciadas, a partir da interação dos indivíduos com objetos ou com outros indivíduos. Em vez de afirmar estar ‘de posse de determinado conhecimento’, devemos procurar compreender seu significado, por meio das relações que são percebidas. Assim é que conhecer é conhecer o significado.

“Assim, precisamos ter claro que o conhecimento não é algo que materialmente se acumula, mas que continuamente se constrói, constituindo uma imensa rede de relações. Tal rede é constituída por nós e relações que interligam os diversos nós. Cada nó é um feixe de relações. Não é possível isolar um nó, nem mesmo uma relação. O conjunto todo tem sentido, não há partes que possam ser isoladamente consideradas.

“A rede é dinâmica, em constante transformação, e nela os feixes de relações vão sendo enriquecidos, como também vão sendo estabelecidas mais e novas relações entre os nós.

“Se fosse possível retratarmos a rede de significações de um indivíduo, em instantes pontuais sucessivos, veríamos uma série de imagens, onde a malha da rede apresenta configurações sucessivas diferentes, sendo que as relações entre os nós, tanto podem ir se tornando numerosas, complexas, como serem substituídas por outras, em novas configurações. Essa transformação é fruto das mais diversas experiências vivenciadas, onde cada novo conhecimento significativo, isto é, repleto de significado para o indivíduo, é assimilado à rede como um novo nó ou através de uma ou várias articulações estabelecidas na configuração anterior, conduzindo a uma reconfiguração da rede inteira. Também perceberíamos que a rede, como um todo, não é estática, cada feixe pode ser alterado, ampliado, substituído, e os próprios nós podem mudar de caracterização.

“Além disso, em termos de significações coletivas, percebemos a existência de uma grande rede cuja constituição, transformação e fortalecimento constante é viabilizada pela contribuição das diversas redes individuais, não em termos de soma, mas em termos de entrelaçamento.

“A concepção mecanicista do universo que, durante séculos resolveu diversos problemas enfrentados pela humanidade, teve suas bases estremecidas, com rachaduras profundas, que não puderam ser controladas. O ideal de tudo ser mensurável e quantificável não conseguiu mais permanecer intacto. As idéias mais simples, de linearidade, causa e efeito, com resultados previsíveis decorrentes de determinadas ações, tiveram que ser revistas e, paulatinamente, substituídas.

“Assim sendo, segundo a metáfora da rede, o conhecimento não pode ser fruto de um simples ato de transmissão, onde quem sabe, ou conhece, expõe para quem não sabe, que, naturalmente, aprende.”

### **3. O PROJETO DE REESTRUTURAÇÃO**

A seguir, descreve-se o projeto, com os objetivos gerais e a metodologia utilizada.

#### **3.1 Objetivos**

Os objetivos da disciplina visam reconhecer a Álgebra Linear como uma ferramenta poderosa que pode ser utilizada pela Engenharia na resolução de muitos problemas, promovendo um interesse maior pelos significados dos conceitos e propriedades pertinentes a ela.

Assim, os objetivos principais são:

- a) apresentar a Álgebra Linear como uma ferramenta poderosa na resolução de problemas ligados à Engenharia;
- b) garantir aprendizagem significativa aos alunos;

- c) levar os alunos a estabelecer em um nível de compromisso e envolvimento com a disciplina;
- d) estabelecer inter-relações com outras disciplinas do currículo.

### 3.2 Metodologia

O curso passou a ser desenvolvido segundo estas diretrizes metodológicas:

- a) resolução de problemas;
- b) trabalhos em grupos fixos de quatro alunos;
- c) trabalhos individuais realizados fora da sala de aula (“lição de casa”);
- d) utilização de novas tecnologias: aplicativos, calculadoras, internet;
- e) discussão com a classe toda, sob a coordenação do professor.

As discussões em pequenos grupos são estimuladas pela proposição de problemas, cuja resolução promove o interesse e o envolvimento dos alunos durante o trabalho em sala de aula. Busca-se, na medida do possível, propor problemas que envolvam situações das outras áreas como Química, Eletricidade etc. A realização de tarefas individuais em horários extra-aula torna-se condição fundamental para a participação na aula, uma vez que os questionamentos pressupõem, normalmente, reflexão e trabalho individual anterior. Para tanto, todas as atividades estavam disponíveis numa página da internet com antecedência suficiente para o bom entendimento da matéria.

O uso de tecnologias mostra aos alunos a utilidade de ferramentas atuais que muitos possuem. Segundo uma pesquisa inicial, com os alunos que iriam cursar a disciplina, verificou-se que a maioria, 76%, já possuía a calculadora HP 48G ou HP 48GX e que 68% possuíam microcomputador com acesso à internet.

Por meio de acesso a websites da internet encontraram-se dois aplicativos de uso livre, WINPLOT e WINMAT, que atendiam às necessidades iniciais na discussão e resolução de sistemas lineares. A maioria dos textos pesquisados utiliza os aplicativos MAPLE ou MATLAB. Optou-se, entretanto, por aplicativos de acesso livre, pois um dos pressupostos é o de que os alunos possam trabalhar em outros ambientes e não somente na escola. Muitos alunos têm, inclusive, a possibilidade de utilizar o computador em seus locais de trabalho, conforme se verificou nas investigações iniciais com o alunato. Dessa forma, a utilização do computador passou a ser estimulada, para propiciar no desenvolvimento do curso características nitidamente mais práticas e atuais; as formalizações e generalizações teóricas necessárias são realizadas após ter ocorrido o convencimento dos alunos sobre a importância das questões e a relevância dos problemas, para quais o computador é um aliado bastante eficaz.

Por exemplo, quando se começou a estudar sistema de equações lineares, buscou-se nos alunos o que já era familiar. Da disciplina Vetores e Geometria Analítica, os sistemas lineares, em dimensão 3, aparecem como interseção de planos; assim, com o Winplot, os alunos construíram gráficos como o da Figura 1, e começavam já nas primeiras aulas a ter a oportunidade de inventar sistemas lineares e rapidamente ver graficamente as eventuais soluções.

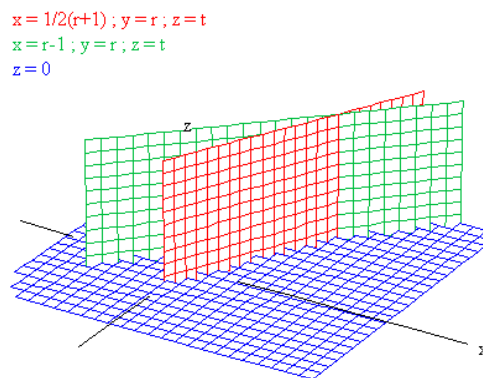


Figura 1:

#### 4. IMPLEMENTAÇÃO

O primeiro passo para a implementação do novo curso foi o de mostrar aos alunos que as exigências seriam muito diferentes daquelas com as quais estavam habituados e, principalmente, convencê-los da necessidade de mudança. Um curso, no qual a participação e o envolvimento dos alunos são pré-requisitos para o seu desenvolvimento, é muito diferente daquele em que há aulas de teoria e listas imensas de exercícios repetitivos para serem resolvidos. Como temos claro na palavra de FREIRE (1987, p.121):

“(...) os homens são seres da práxis. São seres do que fazer, diferentes, por isto mesmo, dos animais, seres do puro fazer. Os animais não ‘admiram’ o mundo. Imergem nele. Os homens, pelo contrário, como seres do que fazer ‘emergem’ dele e, objetivando-o, podem conhecê-lo e transformá-lo com seu trabalho.

“(...) Mas se os homens são seres do que fazer é exatamente porque seu fazer é ação e reflexão. É práxis. É transformação do mundo. E, na razão mesma em que o que fazer é práxis, todo fazer do que fazer tem de ter uma teoria que necessariamente o ilumine. O que fazer é teoria e prática. É reflexão e ação.”

Nesse sentido, quebrar a inércia dos alunos com cuja postura passiva a maioria estava acostumada, não tem sido uma questão imediata nem automática. Entretanto, como os problemas e questionamentos passaram a se tornar significativos, paulatinamente esta mudança está-se tornando uma realidade.

Logo no primeiro encontro foi apresentado aos alunos um texto introdutório que justificava algumas aplicações de Álgebra Linear e, após a discussão em grupo, eles formularam questões geradas pela leitura. Com o desenrolar do curso, muitas vezes os professores passam a desafiar os alunos com questões do tipo “invente um problema” ou “pesquise a respeito” de determinado assunto.

O conteúdo da disciplina continua sendo o padrão: sistemas lineares, matrizes, determinantes, espaços vetoriais, transformações lineares, autovalores e autovetores, mas com uma abordagem diferente. Isso se deve ao fato de utilizar-se fortemente uma metodologia problematizadora, segundo a qual aquilo que deflagra o processo de construção do conhecimento, por parte dos alunos, é a existência de problemas importantes e motivadores. Neste caso, temos três importantes etapas, como afirma BARUFI (1999, p.53):

“A recontextualização e repersonalização, que consistem em explicitar como o conhecimento desejado é contextualizado e tornado pessoalmente necessário para cada

estudante. Isto pode ser verificado na ênfase das idéias subjacentes, importantes historicamente, ou mesmo por sua atualidade, através da colocação de problemas significativos;

“A negociação que se traduz na maneira pela qual significados são construídos. Esta questão pode ser examinada através dos seguintes aspectos fundamentais: a linguagem utilizada, a visualização proporcionada e a argumentação estabelecida;

“A redescontextualização e redespersonalização que consiste na formalização e na generalização necessárias para transformar o conhecimento contextualizado e personificado num conhecimento que possa ser utilizado em outras situações, precisando, portanto, estar desvinculado do contexto e da pessoa que o construiu.”

Um fato interessante é a credulidade e aceitação dos resultados obtidos pelas calculadoras. Em determinado momento do curso ensina-se como se resolverem sistemas lineares na HP 48G/GX; embora muitos já soubessem, pôde-se observar que, conforme o caso, a solução apresentada por ela não é satisfatória. É o caso de problemas cuja resolução depende de um sistema linear homogêneo e indeterminado e a calculadora só apresenta a solução trivial, embora alguns alunos, mesmo antes de resolver o sistema, já tivessem descoberto uma solução não trivial. Também quando o sistema linear dado é incompatível, a calculadora apresenta solução aproximada o que, dependendo da situação, não é viável nem interessante. Assim, a desmistificação da calculadora foi necessária, e, nesse caso específico, motivou uma pesquisa por parte dos alunos sobre a regra de Cramer, por permitir decidir se a solução apresentada pela máquina é ou não satisfatória.

Muitas vezes a calculadora e a regra de Cramer não podem ser utilizadas devido ao fato de o sistema linear proposto ser incompatível ou possível e indeterminado. Nesse caso, então, os alunos foram motivados a descobrir o método de escalonamento ou de Gauss.

## 5. APRIMORAMENTO

Em 2000 uma nova atividade foi criada: permitiu-se que um professor de cada habilitação fosse convidado a apresentar aos alunos uma palestra, procurando aplicar os conceitos de Álgebra Linear nas diversas áreas da Engenharia. Com isso o aluno valorizava os conhecimentos adquiridos na disciplina, criando uma ponte entre o Ciclo Básico e o profissionalizante. Essa atividade foi bem recebida por alunos, que percebiam com mais clareza a utilização da disciplina, e professores que observaram um interesse maior dos alunos pela Álgebra Linear.

Em 2000 e 2001, um trabalho final foi incorporado à avaliação. Essa atividade consistia no fato de que o aluno deveria elaborar um aplicativo gráfico, em conjunto com os conhecimentos obtidos no curso de Computação ministrado na primeira série.

Nesse trabalho, solicitou-se que cada grupo elaborasse um aplicativo que representasse graficamente uma imagem qualquer, escolhida pela equipe. Para tal, linhas e figuras geométricas primitivas, como polígonos regulares e circunferências, deveriam ser dispostas de tal maneira que formasse uma imagem desejada. Para a disposição desses elementos, os alunos utilizaram os conceitos das transformações lineares apresentados durante o curso. Com essas ferramentas, os elementos primitivos poderiam ser transladados, rotacionados, espelhados, cisalhados ou até mesmo alteradas suas dimensões.

Pelo computador, utilizam-se as transformações geométricas sob a forma matricial, ou seja, para um dado ponto pertencente à tela discretizada do monitor (pixel), multiplica-se a matriz de transformação geométrica pelo vetor coluna com as coordenadas do pixel.

Com os aplicativos concluídos, havia uma apresentação do trabalho para a turma à qual o grupo pertencia, avaliado pelo professor responsável pela turma e por um membro convidado, pertencente ao corpo docente da disciplina Computação.

Em virtude da reforma curricular aplicada na disciplina Computação, essa atividade deixou de existir, pois os conceitos relacionados ao desenvolvimento de aplicativos gráficos foram retirados da ementa da disciplina.

Em substituição a esse trabalho, uma nova atividade teve de ser desenvolvida. A partir de 2002, o trabalho final com apresentação pelo grupo continuou sendo realizado, entretanto duas mudanças significativas puderam ser notadas:

deixou de haver um membro convidado na avaliação do trabalho;  
o tema apresentado estaria diretamente ligado à habilitação do grupo.

O antigo trabalho exigia do aluno conhecimentos de transformações lineares, enquanto seu sucessor abordava um assunto que havia sido introduzido recentemente na ementa de Álgebra Linear: as Equações Diferenciais Ordinárias.

Alguns temas eram sugeridos e permitia-se que os alunos escolhessem o tema ou até mesmo propusessem um novo relacionado à sua habilitação.

Considerando-se o fato de que as disciplinas Cálculo II e Métodos Computacionais (atualmente Métodos Numéricos) também apresentaram a resolução para esse tipo de problema, solicitou-se que o grupo realizasse uma comparação entre o método apresentado em Álgebra Linear com a abordagem apresentada numa das outras disciplinas, analisando-se a complexidade dos cálculos em cada processo e a viabilidade de implementação num aplicativo.

## **6. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Em todos esses anos em que a Álgebra Linear foi ministrada como disciplina isolada, notou-se que mudanças propostas, diferentes das tradicionais, levam tempo para serem implementadas e aceitas por alunos e, principalmente, por professores, pois requerem o envolvimento efetivo do docente no sentido de perceber, com clareza, que não é um mero transmissor de conhecimento, mas um facilitador da construção do conhecimento de seus alunos. Os professores não estão, em geral, habituados a esse tipo de trabalho, o que demanda certa aprendizagem e bastante reflexão.

A adesão não é imediata, nem total. É construída paulatinamente, mas exige que os professores estejam constantemente alerta e saibam convencer, com seu trabalho, que os alunos poderão construir, coletiva e individualmente, o conhecimento.

Embora a experiência apresentada neste trabalho não esteja sendo aplicada no momento, espera-se que reflexões sobre mudanças metodológicas possam e devam ser incorporadas no dia-a-dia da ação docente.

## REFERÊNCIAS

- BARUFI, M.C.B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** 1999. Tese (Doutorado) - FEUSP, Universidade de São Paulo, São Paulo 1999.
- BOLDRINI, J.L.(et al.). **Álgebra Linear.** São Paulo: Harbra, 1980.
- FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido.** São Paulo: Paz e Terra S/A, 1998.
- GOMES E. *et al.* **A Álgebra Linear na formação do Engenheiro – Uma experiência na Escola de Engenharia Mauá.** In: COBENGE XXVII, 1999, Natal. **Anais.**
- KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1998.
- LATORRE, D.R. **Linear Algebra Investigation with the HP-48G/GX.** Massachusetts: Charles River Media, 1995.
- LAWSON, T. **Álgebra Linear.** São Paulo: Edgard-Blücher, 1997.
- LAY, D.C. **Linear Algebra and Its Applications.** Maryland: Addison Wesley, 1998.
- LEON, S.J. **Linear Algebra with Applications.** New Jersey: Prentice-Hall, 1998.